10 Verificare che, qualunque siano le costanti reali φ e k, la funzione $y = ke^{-x}\sin(x+\varphi)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + 2y = 0$. Trovare φ e k tali che questa funzione abbia un punto di massimo di coordinate $(0; 1)$.

10 Data la funzione

$$y = k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x + \varphi),$$

calcoliamo le sue derivate:

$$y' = -k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x+\varphi) + k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x+\varphi) = k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x+\varphi) - \sin(x+\varphi)];$$

$$y'' = -k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x+\varphi) - \sin(x+\varphi)] + k \cdot e^{-x} \cdot [-\sin(x+\varphi) - \cos(x+\varphi)] \rightarrow$$

$$y'' = -2k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x+\varphi).$$

Sostituiamo le funzioni nell'equazione differenziale data:

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \rightarrow$$

$$-2k \cdot e^{-x} \cdot \cos(x+\varphi) + 2k \cdot e^{-x} \cdot [\cos(x+\varphi) - \sin(x+\varphi)] + 2k \cdot e^{-x} \cdot \sin(x+\varphi) = 0 \rightarrow$$

$$2k \cdot e^{-x} \cdot [-\cancel{\cos(x+\varphi)} + \cancel{\cos(x+\varphi)} - \cancel{\sin(x+\varphi)} + \cancel{\sin(x+\varphi)}] \rightarrow 0 = 0.$$

Abbiamo ottenuto un'identità, quindi la funzione $y(x)$ assegnata è soluzione dell'equazione differenziale per ogni k e per ogni φ.
Determiniamo φ e k in modo che $y(x)$ abbia un massimo in (0; 1).
Innanzi tutto deve essere:

$$y(0) = 1 \rightarrow k \cdot e^{-0} \cdot \sin(0+\varphi) = 1 \rightarrow k \sin\varphi = 1.$$

Possiamo supporre $k \neq 0$, altrimenti l'uguaglianza non sarebbe verificata, quindi possiamo scrivere:

$$\sin\varphi = \frac{1}{k}.$$

Affinché in (0; 1) ci sia un massimo, deve essere:

- $y'(0) = 0$, così che $x = 0$ sia un punto estremante;
- $y''(0) < 0$, così che la concavità in $x = 0$ sia rivolta verso il basso.

Imponiamo le due condizioni:

$$y'(0) = 0 \rightarrow k \cdot e^{-0} \cdot [\cos(0+\varphi) - \sin(0+\varphi)] = 0 \rightarrow k[\cos\varphi - \sin\varphi] = 0 \rightarrow$$

$$k\left[\cos\varphi - \frac{1}{k}\right] = 0 \rightarrow k\cos\varphi - 1 = 0 \rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{k}.$$

$$y''(0) < 0 \rightarrow -2k \cdot e^{-0} \cdot \cos(0+\varphi) < 0 \rightarrow -2k \cdot \cos\varphi < 0 \rightarrow -2k \cdot \frac{1}{k} < 0 \rightarrow$$

$$-2 < 0 \text{ sempre verificata.}$$

Dalle due condizioni trovate $\sin\varphi = \frac{1}{k}$ e $\cos\varphi = \frac{1}{k}$ deduciamo che i valori di seno e coseno della fase φ devono essere uguali, quindi φ deve essere l'angolo $\frac{\pi}{4} + 2h\pi$ oppure l'angolo $\frac{5\pi}{4} + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$.

Se $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, è $k = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{2}$ e la funzione cercata è:

$$y = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4} + 2h\pi\right) = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Se $\varphi = \frac{5\pi}{4} + 2h\pi$, con $h \in \mathbb{Z}$, è $k = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} = -\sqrt{2}$ e la funzione cercata è:

$$y = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4} + 2h\pi\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right).$$

Osserviamo che le due funzioni trovate coincidono. Infatti:

$$y = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left[\pi + \left(\frac{\pi}{4} + x\right)\right] = \sqrt{2} \cdot e^{-x} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$